



TITLE:

粗視化された古典系と伏見関数(カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

高橋, 公也

CITATION:

高橋, 公也. 粗視化された古典系と伏見関数(カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1987, 48(4): 392-396

ISSUE DATE:

1987-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92600>

RIGHT:

類を与えることができる。摂動系の可積分性は、その解を可積分系である KdV 方程式の解で表現できるか否か（埋め込みの問題）によって議論できる。これは有限自由度系での Birkhoff の標準形理論の無限自由度系への応用である。最後に、大小2つの孤立波の衝突を議論し、その結果、さざなみの発生と同時に新しい孤立波を生じる非弾性衝突をすることが示される。このとき、大きな孤立波はより大きく、小さいのはより小さくなり、さらにさざなみへのエネルギー放出は、ほとんど小さな孤立波によって生成されることがわかる。

参 考 文 献

- Y. Kodama: "Nearly integrable systems" *Physica* **16D** (1985) 14.
 "Normal Form and Solitons" Preprint DPNU-86-42 (1986).
 "On solitary-wave interaction" Preprint DPNU-86-48 (1986).

粗視化された古典系と伏見関数

早大・理工 高 橋 公 也

伏見関数 ρ_H は、粗視化の効果により正值の分布関数となり *Wigner* 関数よりも古典力学とよく対応する。しかし、自由粒子や調和振動子の時間発展を考える場合は古典系と *Wigner* 関数は完全に一致する。たとえば、次のような調和振動子系

$$H = H_c = H_w = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (1)$$

(H_c は古典系のハミルトニアン, H_w は *Wigner* 表示のハミルトニアン) を考える場合、古典系の分布関数 ρ_c と *Wigner* 関数 ρ_w の時間発展は一致する。

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \{H_c, \rho_c\}, \quad \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \{H_w, \rho_w\} \quad (2)$$

これに対し伏見表示のハミルトニアンは、

$$H_H = \frac{1}{2m} (p^2 + (\Delta p)^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (q^2 + (\Delta q)^2) \quad \Delta q = \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \quad (3)$$

となり、伏見関数の時間発展は、

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \rho_H}{\partial q} + m\omega^2 q \frac{\partial \rho_H}{\partial p} - \frac{\hbar}{2} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \rho_H}{\partial q \partial p} + \frac{\hbar}{2} m\omega^2 \frac{\partial^2 \rho_H}{\partial q \partial p} \quad (4)$$

となる。あきらかに、伏見表示では、粗視化のために余分な項が付け加わっている。そこで古典系の分布関数 ρ_c に対し、Wigner 関数から伏見関数への粗視化と同じ粗視化された古典系の分布関数 ρ_{cc} を考える。

$$\begin{aligned} \rho_{cc} &= (\pi\hbar)^{-1} \int \exp\left\{-\left(\frac{(q'-q)^2}{2(\Delta q)^2} + \frac{(p'-p)^2}{2(\Delta p)^2}\right)\right\} \rho_c(q', p') dq' dp' \\ &= \exp\left\{\frac{\hbar}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\right\} \rho_c(q, p) \end{aligned} \quad (5)$$

粗視化された古典系の力学量も同じ式で定義されたとすると、二つの力学量の積 $(A_c B_c)_c$ は A_{cc} と B_{cc} の単純な積にはならず、

$$(A_c B_c)_c = (B_c A_c)_c = A_{cc} \exp\left\{\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right\} B_{cc} \quad (6)$$

となる。従って、粗視化された古典系の調和振動子のハミルトニアンは、 $H_{cc} = H_H$ となり伏見表示と一致するので、 ρ_{cc} の時間発展は、

$$\frac{\partial \rho_{cc}}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \rho_{cc}}{\partial q} + m\omega^2 q \frac{\partial \rho_{cc}}{\partial p} - \frac{\hbar}{2} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \rho_{cc}}{\partial q \partial p} + \frac{\hbar}{2} m\omega^2 \frac{\partial^2 \rho_{cc}}{\partial q \partial p} \quad (7)$$

となり、伏見表示と完全に一致する。

従って、一般の非線形ポテンシャルを持った系でも、伏見関数は、古典系よりも粗視化された古典系とよく対応すると考えられる。そこで、ガウス波束

$$\rho_H = \rho_{cc} = (\beta\pi\hbar)^{-1} \exp\left\{-\frac{(q - \langle q \rangle)^2}{2\beta(\Delta q)^2} - \frac{(p - \langle p \rangle)^2}{2\beta(\Delta p)^2}\right\} \quad \Delta q = \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \quad (8)$$

の $t=0$ における時間発展を計算すると、伏見関数では、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_H}{\partial t} &= -\frac{1}{m} \left(p + \frac{1}{\beta} (\langle p \rangle - p)\right) \frac{\partial \rho_H}{\partial q} \\ &+ \text{Im} \frac{2}{\hbar} \rho_H \exp\left(\frac{\hbar}{2} i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q'}\right) \exp\left(-\frac{\hbar}{4\beta} \frac{\partial^2}{\partial q'^2}\right) V_H(q') \Big|_{q'=q+\frac{1}{\beta}(\langle q \rangle - q)} \end{aligned}$$

$$\sim -\frac{1}{m} \left(p + \frac{1}{\beta} (\langle p \rangle - p) \right) \frac{\partial \rho_H}{\partial q} + \frac{\partial \rho_H}{\partial p} \exp \left(-\frac{\hbar}{4\beta} \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) \times V_H(q') \Big|_{q'=q+\frac{1}{\beta}(\langle q \rangle - q)} \quad (9)$$

となり、粗視化された古典系では、

$$\frac{\partial \rho_{cc}}{\partial t} = -\frac{1}{m} \left(p + \frac{1}{\beta} (\langle p \rangle - p) \right) \frac{\partial \rho_{cc}}{\partial q} + \frac{\partial \rho_{cc}}{\partial p} \exp \left(-\frac{\hbar}{4\beta} \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) \times V_{cc}(q') \Big|_{q'=q+\frac{1}{\beta}(\langle q \rangle - q)} \quad (10)$$

となる。従って両者は時間発展の初期の段階では近似的に一致すると考えられる。そこで、具体的な数値計算により、伏見関数と粗視化された古典系の分布関数の時間発展を比較する。ここでは、次のような Double well potential に周期外力を入れた系を使う。

$$H_c = H_w = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{16} (1 + 0.4 \sin(0.7t)) q^4 \quad (11)$$

この系は、原点の回りに大きなカオス領域を作る。初期状態として原点においた極小波束 ($\beta=2$, $\langle q \rangle = \langle p \rangle = 0$) を選び、外力の周期 ($T = 2\pi/0.7$) ごとのストロボマップを調べる。図1は、 $t = T, 2T, 10T$ のときの伏見関数である。図2は、 $t = T, 2T, 10T$ のときの粗視化された古典系の分布関数である。 $t = T$ で、両者はほぼ一致するが、 $t = 2T$ では、伏見関数は干渉するために、両者の間の対応は悪くなる。 $t = 10T$ では、両者は、ほぼ同じ領域に広がっているが、伏見関数は小さな波束の集りであるのに対し粗視化された古典系の分布関数は、ほぼ一様に広がっている。

伏見関数と粗視化された古典系の分布関数を特徴づける量としてエントロピーを導入しよう。まず、量子系と古典系のエントロピーを伏見表示と粗視化された古典系で表わすと、

$$S_q = -k \text{Tr} \left(\hat{\rho} \ln \hat{\rho} \right) = -k (2\pi \hbar) - k \int (\rho' \ln \rho')_H dq dp \quad (12)$$

$$S_c = -k \int \rho_c \ln \rho_c dq dp = -k \int (\rho_c \ln \rho_c)_c dq dp \quad (13)$$

となる。ここで、

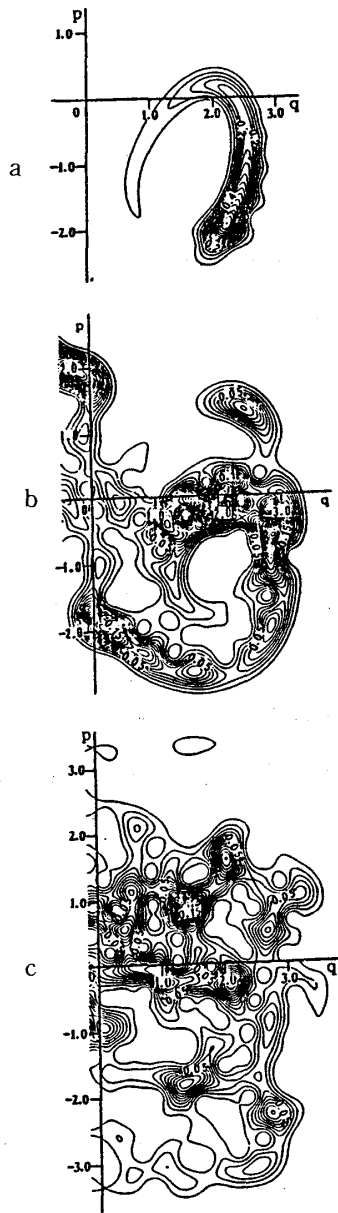


図1. 伏見関数の時間発展

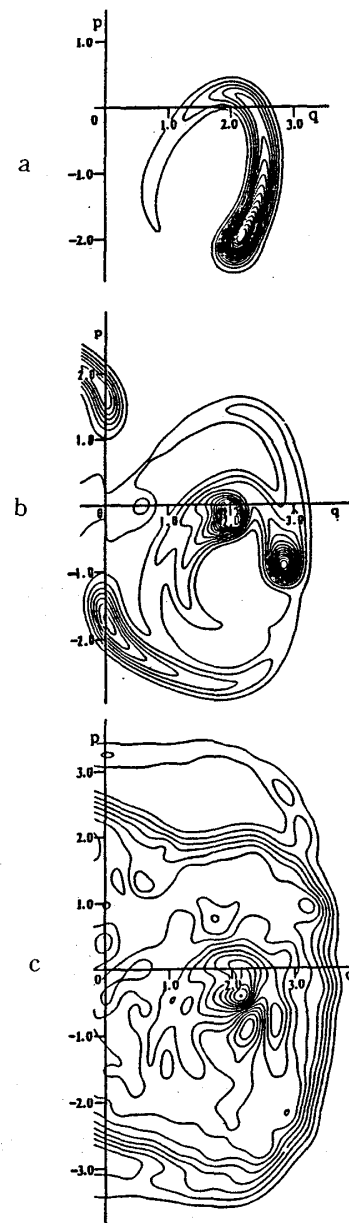
a) $t = T$ b) $t = 2T$ c) $t = 10T$ 

図2. 粗視化された古典系の分布関数の時間発展

a) $t = T$ b) $t = 2T$ c) $t = 10T$

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{2\pi\hbar} |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar}, \quad \rho_H = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle\phi_{qp}|\psi\rangle|^2 = (\rho')_H \quad (14)$$

である (ϕ_{qp} は極小波束)。そこで、伏見表示と粗視化された古典系のエントロピーとして次の量を定義する ($k=1$ とおく)。

$$S_H = \int \rho_H \ln \rho_H dq dp, \quad S_{cc} = \int \rho_{cc} \ln \rho_{cc} dq dp \quad (15)$$

S_q と S_c は孤立した力学系では、時間的に増大することはないが、 $(\rho' \ln \rho')_H \neq \rho_H \ln \rho_H$ お

よび $(\rho_c \ln \rho_c)_c \neq \rho_{cc} \ln \rho_{cc}$ より, S_H, S_{cc} は, 時間的に増大する可能性がある。図3に S_H と S_{cc} の時間変化を示す。 S_H と S_{cc} は, ともに時間的に増大する。最初, 両者は, ほぼ一致するが量子力学的な干渉がおきると $S_H < S_{cc}$ となる。このことは量子系の方が古典系よりも, 規則的であることを示していると考えられる。

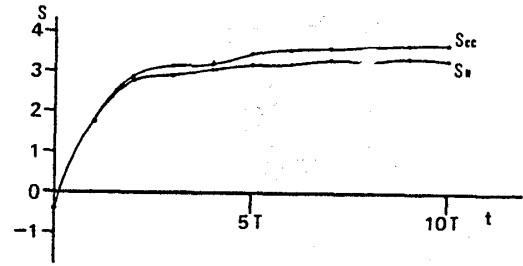


図3. エントロピー。 S_H と S_{cc} の時間発展

ハミルトニアン行列の乱雑さとエネルギーレベルの統計的性質

早大・理工 首 藤 啓
東工大・理 松 下 利 樹

古典系にみられるカオスが, 対応する量子系にいかに関与するかということを見るのに最近接レベル間隔分布は, 一つの指標と考えられている。古典極限が可積分であるとき, 一般にはポアソン分布となることが示される。また系のカオスの程度が強くなるに従って, ランダム行列理論のガウス型直交アンサンブル (GOE) から導かれるウィグナー分布に近づくことが数値計算で確かめられている (Fig. 1 (a)(b))。

しかしながら, 現実には, ハミルトニアン行列の行列要素は決定論的に決められたものであり, 相当大次元の行列が考察されているとはいえ, 我々の解析範囲内での次元は有限であり, どの程度まで「確率変数」とみなすことができるかは自明ではない。また, Fig. 1 にみるような古典系における低次共鳴に対応すると考えられるパラメーター領域での細かな振動構造がランダム行列の概念で記述可能かどうかは問題といわざるをえない。

我々の解析するハミルトニアンは,

1. モース系

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \quad (1)$$

$$H_i = - \left(\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + V_i(r_i) \quad i = 1, 2$$